Список литературы: **1.** *Биргер И.А., Шорр Б.Ф., Иосилевич Г.Б.* Расчет на прочность деталей машин. – М.: Машиностроение, 1979. – 702 с. **2.** *Вейц В.Л., Кочура А.Е.* Динамика машинных агрегатов с двигателями внутреннего сгорания. – Л.: Машиностроение, 1978. – 352 с. **3.** *Алексеева С.В., Вейц В.Л., Геккер Ф.Р., Кочура А.Е.* Силовые передачи транспортных машин: Динамика и расчет. – Л.: Машиностроение, 1982. – 256 с. **4.** *Шатохін В.* Застосування інтегральних рівнянь при дослідженні сталих динамічних процесів у нелінійних моделях машинних агрегатів // Машинознавство. – 2002. – № 4 (58). – С. 20-25. **5.** *Шатохин В.М.* Решение нелинейных интегро-дифференциальных уравнений периодических колебаний силовых передач машин с использованием ДПФ // Вестник ХГПУ. – Харьков: ХГПУ. – 1998. – Вып. 29. – С. 15-26. **6.** *Вульфсон И.И., Коловский М.З.* Нелинейные задачи динамики машин. – Л.: Машиностроение, 1968. – 284 с.

Поступила в редколлегию 15.06.2007

УДК 658.012

Е.Г.ЯНЮТИН, докт.техн.наук; ***Н.И.КУЧЕРОВА***; НТУ «ХПИ»

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ВО ВРЕМЕНИ ФУНКЦИИ НАГРУЗКИ, ВОЗДЕЙСТВУЮЩЕЙ НА БЕСКОНЕЧНУЮ МЕМБРАНУ-ПОЛОСУ

Запропоновано два способи розв'язку оберненої задачі про визначення невідомої складової навантаження у часі. Вважається, що зміна прогину мембрани-смуги в однієї з її точок у часі відома. При розв'язку задачі використовувались інтегральні рівняння Вольтерра I і II родів.

Two methods to solve the inverse problem of determining the unknown time component of load are proposed in the article. It is supposed that the time dependence of deflection of the membrane-belt in one of its points is known. The integral Volterra equations of the first and the second kinds are used to solve the problem.

Проблема обеспечения инженеров и конструкторов всесторонней информацией, использующих результаты научных исследований по нестационарному нагружению элементов конструкций, сложна по многим причинам. Одной из причин является то, что при конструировании не всегда известны законы изменения во времени воздействующих на элементы конструкций нагрузок; поэтому необходимо развивать методики идентификации нагрузок.

В настоящее время существует ряд работ по идентификации внешних импульсных воздействий на элементы конструкций по их проявлениям деформационного характера, которые могут быть измерены в некоторых точках этих элементов.

В данной работе представлены два способа идентификации нагрузки, воздействующей на бесконечную мембрану-полосу.

Рассмотрим мембрану, ограниченную прямыми $x = 0$; $x = l$. Вдоль оси ординат мембрана является бесконечной при $y \to \pm\infty$ (рис. 1).

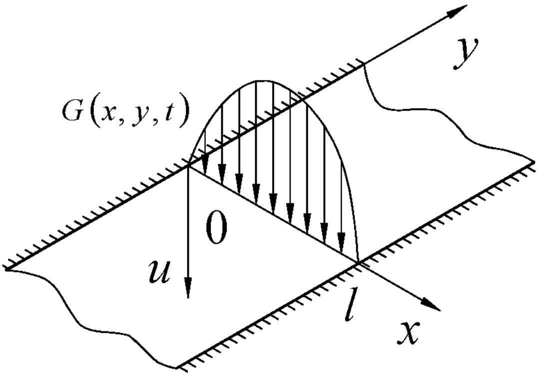

Рисунок 1 – Схема нагружения мембраны

При решении обратных задач воспользуемся формулами, которые получены при решении прямой задачи [1]. В [1] на основе уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = b^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + G(x,y,t) \tag{1}$$

и соответствующих граничных условий и нулевых начальных условий получено решение вида

$$u(x,y,t) = \frac{1}{2b\rho} \cdot H\left(t - \frac{|y|}{b}\right) \cdot \int_0^{t-\frac{|y|}{b}} P(\tau) \cdot J_0\left(Qb \cdot \sqrt{(t-\tau)^2 - \left(\frac{|y|}{b}\right)^2}\right) d\tau \cdot \sin\frac{\pi x}{l}, \tag{2}$$

где u – нормальное перемещение точек мембраны-полосы; b – скорость распространения деформационной волны в мембране-полосе; ρ – удельная плотность мембраны; $H(t)$ – единичная функция Хевисайда, равная единице при положительных значениях аргумента и нулю – при отрицательных; J_0 – функция Бесселя нулевого порядка; l – ширина мембраны; $P(t)$ – интенсивность внешней нагрузки; $Q = \sqrt{\pi^2/l^2}$. Отметим, что решение (2) отвечает следующему варианту правой части $G(x,y,t) = \frac{1}{\rho}\delta(y)\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)P(t)$, где $\delta(y)$ – дельта-функция.

1. Первый способ решения задачи об определении нагрузки

Целью задачи является определение функции нагрузки от времени по известному (заданному) изменению перемещения мембраны в некоторой ее точке с координатами (x_0, y_0). Аналогичные исследования для мембраны конечных размеров представлены в монографии [2].

Соотношение (2) будем рассматривать в качестве интегрального уравнения Вольтерра первого рода [3], в котором неизвестной будет функция $P(t)$, а $u(x_0, y_0, t)$ – правая часть. Указанное уравнение решается с помощью одного из методов прямоугольников. Укажем, что ядро интегрального уравнения (2) является невырожденным.

Для получения нагрузки во времени $P(t)$ применим к формуле (2) способ аппроксимации неизвестной функции кусочно-постоянными функциями во времени [2].

Восстановим функцию нагрузки в предположении, что в качестве исходных данных используются значения перемещения мембраны в точке $x_0 = l/2$; $y_0 = 0{,}224$ м, которые получаются при решении прямой задачи. Соответствующая кривая, отвечающая решению прямой задачи, представлена на рис. 2.

На рис. 3 представлены три кривые, которые соответствуют функции нагрузки.

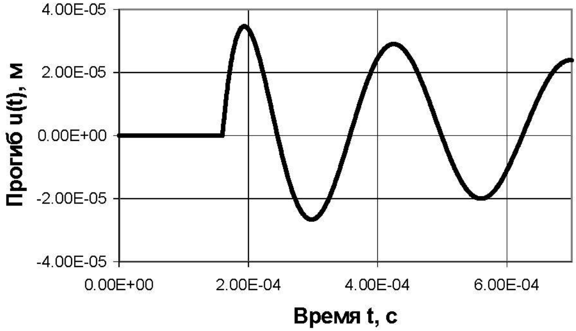

Рисунок 2 – Изменение прогиба во времени в случае $x_0 = l/2$; $y_0 = 0{,}224$ м

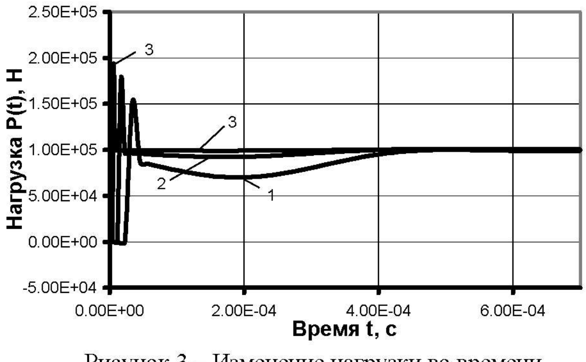

Рисунок 3 – Изменение нагрузки во времени

Кривая 1 рассчитана при значении $\Delta t = 1{,}143 \cdot 10^{-5}$ с, а кривая 2 – $\Delta t = 5{,}714 \cdot 10^{-6}$ с, кривая 3 – $\Delta t = 2 \cdot 10^{-6}$ с. Наилучшее приближение к задаваемой нагрузке, принятой при решении прямой задачи, представляет кривая 3. Неточности в численном определении искомой функции в окрестности точки $t = 0$, по-видимому, связаны с естественными свойствами численных решений уравнений Вольтерра первого рода [3], поскольку значение искомой функции при $t = 0$ такого рода решениями не определяется.

Рассмотренная обратная задача относится к типу некорректных задач. Она сведена к решению интегрального уравнения Вольтерра первого рода с невырожденным ядром, численное решение которого здесь было осуществлено способом, близким к методу квадратур, предлагаемым А.С.Апарциным [4]. Применение этого подхода позволило получить решение поставленной обратной задачи сравнительно простым способом, обладающим свойством регуляризации.

2. Второй способ решения задачи об определении нагрузки

Второй способ решения обратной задачи об определении неизвестной нагрузки заключается по существу в сведении определяющего уравнения Вольтерра первого рода (2) к уравнению Вольтерра второго рода. Целесообразность такого подхода состоит в том, что, если удается получить соответствующее уравнение Вольтерра второго рода, то это позволяет во многом избежать математических трудностей решение некорректной задачи [4].

Выполнив дифференцирование по времени левой и правой частей уравнения (2), получим следующее выражение

$$\dot{u}(x_0, y_0, t) = \frac{\sin\frac{\pi x_0}{l}}{2b\rho} \cdot H\left(t - \frac{|y_0|}{b}\right) \times$$

$$\times \left(P\left(t - \frac{|y_0|}{b}\right) - Qb \cdot \int\limits_0^{t-\frac{|y_0|}{b}} P(\tau) \cdot J_1(Qb \cdot D(t,\tau)) \cdot \frac{t-\tau}{D(t,\tau)} d\tau \right), \quad (3)$$

где $D(t,\tau) = \sqrt{(t-\tau)^2 - \left(\frac{y_0}{b}\right)^2}$.

Выражение (3) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода, его решаем, как и в первом случае, с помощью способа аппроксимации.

Произведем тестирование данного выражения. Идентифицируем нагрузку при $x_0 = l/2$; $y_0 \neq 0$, а именно $y_0 = 0{,}112$ м. Это случай, когда точка регистрации перемещения не находится непосредственно под нагрузкой. На основании выражения (3) и численных данных, которые использовались ранее при решении прямой задачи (см. рис. 2), получим кривые изменения нагрузки во времени при условии, что нагрузка приложена в точке $y = 0$, а регистрация перемещения осуществляется в точке $y_0 = 0{,}112$ м. Соответствующие кривые, отвечающие решению прямой задачи, представлены на рис. 4. Отметим, что кривая отвечающая, скорости перемещения, получена численно с использованием аппарата конечных разностей. Причем эти кривые соответствуют конечно-разностной аппроксимации при $\Delta t = 1{,}667 \cdot 10^{-7}$ с. Укажем еще раз, что значения, определяемые кривыми на рис. 4, являются исходными данными для восстановления воздействующей нагрузки на мембрану в обратной задаче.

На рис. 5 представлены кривые изменения нагрузки, идентифицированной по приведенным исходным данным.

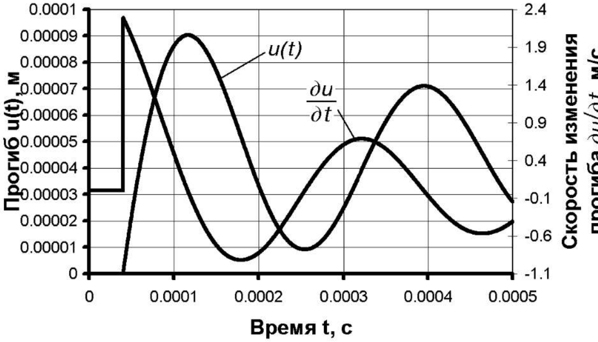

Рисунок 4 – Изменение прогиба и его первой производной во времени

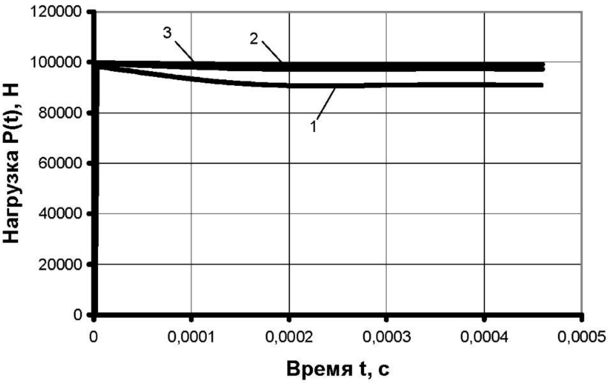

Рисунок 5 – Значения идентифицированной нагрузки во времени, которые отвечают различным величинам шагов во времени

На рис. 5 изображены три кривые, каждая из которых соответствует конкретному шагу во времени. Первая кривая – $\Delta t = 1{,}667 \cdot 10^{-6}$ с, вторая– $\Delta t = 5 \cdot 10^{-7}$ с и кривая 3 – $\Delta t = 1{,}667 \cdot 10^{-7}$ с. Наилучшим результатом идентификации является кривая 3, соответствующая наименьшему шагу во времени из рассмотренных.

В заключение рассмотрим произвольное задание нагрузки. Пусть результат ее воздействия, то есть прогиб мембраны в точке y_0 = 0,448 м как функция времени, имеет вид, представленный на рис. 6.

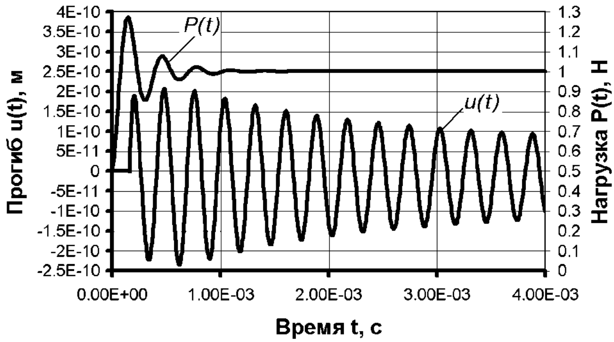

Рисунок 6 – Изменение прогиба и нагрузки во времени

Выполнив процедуру идентификации, получим изменение воздействующей нагрузки во времени, график которой приведен на рис. 6.

После того, как на основе полученной восстановленной нагрузки, произвести расчет прогиба мембраны в соответствующей точке, то получим кривую прогиба, совпадающую (на визуальном уровне восприятия) с кривой на рис. 6.

Предложенные два способа решения обратной задачи по восстановлению во времени временной составляющей нагрузки, воздействующей на мембрану-полосу, отличается друг от друга тем, что в одном случае решение основывается на анализе интегрального уравнения Вольтерра первого рода, а во втором – на уравнении второго рода. Простота и эффективность решения задачи обусловлена тем, что решение обратной задачи базируется на интегральных уравнениях с невырожденным ядром.

Список литературы: **1.** *Янютин Е.Г., Кучерова Н.И.* Определение влияния сосредоточенного нестационарного воздействия на мембрану-полосу // Вестник ХНАДУ. – 2006. – **32**. – С. 80-83. **2.** *Янютин Е.Г., Янчевский И.В., Воропай А.В., Шарапата А.С.* Задачи импульсного деформирования элементов конструкций. – Харьков: ХНАДУ, 2004. – 392 с. **3.** *Верлань А.Ф., Сизиков В.С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие. – Киев: Наук. думка, 1986. – 544 с. **4.** *Апарцин А. С.* О численном решении систем интегральных уравнений Вольтерра I рода методом квадратур. – В кн.: Методы оптимизации и исследование операций. Иркутск, 1976. – Вып. 4. – С. 79-88.

Поступила в редколлегию 12.04.2007